

Indicar claramente apellido y número de padrón en cada hoja que entregue.
No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

Apellido: Nombres:

Padrón: Código materia: Curso:

1. Sean $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $g(x, y) = [f(x, y)]^2 + (y - 1)^2$. Si $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es la curva de nivel 0 de f hallar los extremos absolutos de g restringidos a C .
2. Sea el campo conservativo $\vec{G}(\vec{r}) = \frac{2\vec{r}}{||\vec{r}||^4}$, $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, hallar las líneas de campo de \vec{G} y las curvas equipotenciales.
3. Sean $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $h(x, y, z) > 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $C \subset \mathbb{R}^3$ un arco de curva con punto inicial P y punto final Q . Demostrar que $\vec{F} = \frac{\nabla h}{h}$ es un campo de gradientes en \mathbb{R}^3 y calcular la circulación del campo \vec{F} sobre C sabiendo que la circulación de ∇h sobre C es nula.
4. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, e^z, \sin(x))$ a través de la superficie frontera del cuerpo $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Indicar en un gráfico la normal utilizada.
5. Sea \vec{F} un campo vectorial $C^3(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (-2x, y, z)$ y $g(x, y, z) = x^2y + yz^2$. Siendo $\vec{H} = \vec{F} + \nabla g$, hallar la circulación de \vec{H} a lo largo de la curva frontera de la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1; 0 \leq x \leq y; z \geq 0\}$. Indicar en un gráfico el sentido de circulación elegido.

① Sean $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $g(x,y) = [f(x,y)]^2 + (y-1)^2$. Si $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es la curva de nivel 0 de f hallar los extremos absolutos de g restringidos a C

Parametrizo C : Sea $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.q. $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

Ahora defino $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $h(t) = g(\tilde{\gamma}(t)) = [f(\tilde{\gamma}(t))]^2 + (\sin(t) - 1)^2$

Como C , parametrizada por $\tilde{\gamma}(t)$, es la curva de nivel 0 de f entonces a lo largo de todos los puntos de C f vale 0 $\therefore f(\tilde{\gamma}(t)) = 0$

Así es como:

$$h(t) = g(\tilde{\gamma}(t)) = \overbrace{[f(\tilde{\gamma}(t))]^2}^0 + (\sin(t) - 1)^2$$

$$h(t) = \sin^2(t) - 2\sin(t) + 1$$

Por lo tanto, los Puntos Críticos son:

a) los extremos de C en la parametrización (o sea $t_1 = 0$ y $t_2 = 2\pi$)

$$PC_1 = \tilde{\gamma}(0) = (1, 0)$$

(es el mismo que $\tilde{\gamma}(2\pi) = (1, 0)$)

b) los puntos de la curva donde la función se anula, para eso derivamos y la igualo a cero

$$h'(t) = 2\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t) = 0$$

• Si $\cos(t) = 0 \rightarrow h'(t) = 0 : \cos(t) = 0 \rightarrow t_3 = \pi/2$ y $t_4 = 3\pi/2$

$$\therefore PC_2 = \tilde{\gamma}(\pi/2) = (0, 1)$$

$$PC_3 = \tilde{\gamma}(3\pi/2) = (0, -1)$$

• Si $\cos(t) \neq 0 \rightarrow 2\sin(t)\cos(t) = 2\cos(t) \rightarrow 2\sin(t) = 1 \rightarrow t_5 = \pi/2 = t_3$ ✓

Como C es un conjunto compacto (cerrado y acotado) por el teorema de Weierstrass puedo asegurar que \exists al menos un máximo y un mínimo absoluto.

Por lo tanto, evalúo g en los PC hallados y defino los extremos absolutos:

$$g(PC_1) = g(1, 0) = 1$$

$$g(PC_2) = g(0, 1) = 0$$

$$g(PC_3) = g(0, -1) = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en } (1, 0) \text{ } g \text{ alcanza Mínimo absoluto} = 0 \\ \text{en } (0, 1) \text{ } g \text{ alcanza Máximo absoluto} = 4 \end{array} \right.$$

$$g(t) = \underbrace{f(t)}_0^2 + (y-1)^2$$

② Sea el campo conservativo $\vec{G}(\vec{r}) = \frac{2\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}$, $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, hallar las líneas de campo de \vec{G} y las curvas equipotenciales.

$$\vec{r} = (x, y) \rightarrow \vec{G}(\vec{r}) = \vec{G}(x, y) = \frac{2(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{2(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \vec{G}(x, y)$$

Para hallar las líneas de campo tenemos que $\vec{G}(x, y) = \vec{G}(x(t), y(t)) = (x'(t), y'(t))$

$$\therefore \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = (x'(t), y'(t))$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} = x'(t) \\ \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} = y'(t) \end{cases} \rightarrow \frac{x'}{y'} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}}{\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{x}{y} = \frac{dx}{dy} \rightarrow \boxed{\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx}$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \xrightarrow{\text{integral}} \ln(|y|) = \ln(|x|) + C$$

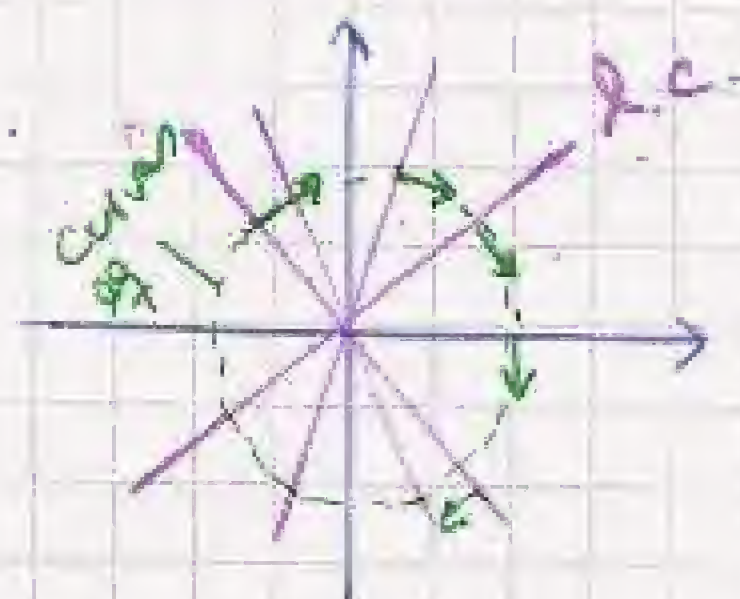
$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + C} = e^{\ln|x|} \cdot e^C$$

\therefore Líneas de campo: $\boxed{y = x \cdot K}$ \rightarrow familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas

Las curvas equipotenciales son ortogonales a las líneas de campo, como las l.c. son rectas que pasan por el origen \rightarrow c. equip. son circunferencias centradas en el origen \rightarrow Curvas equip.: $\boxed{x^2 + y^2 = K}$

Analicamente:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \frac{y}{x}, \text{ flia equip: } y_2' = -\frac{1}{y_1'} = \frac{-x}{y} = y_2' = \frac{dy}{dx}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \rightarrow y dy = -x dx \xrightarrow{\text{integral}} \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$$

$$\text{como } 2C = K \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = K}$$

③ Sean $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $h(x, y, z) > 0$
 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $C \subset \mathbb{R}^3$ un arco de curva con punto inicial P y punto final
 Q . Demostrar que $\vec{F} = \frac{\nabla h}{h}$ es un campo de gradientes en \mathbb{R}^3 y calcular la
 circulación del campo \vec{F} sobre C sabiendo que la circulación de ∇h sobre
 C es nula.

Sea $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(x, y, z) = \ln(h(x, y, z)) \rightarrow \nabla \varphi = \frac{\nabla h(x, y, z)}{h(x, y, z)}$

Por lo tanto $\exists \varphi$ t.q. $\vec{F} = \nabla \varphi$

Por enunciado, $h \in C^2 \rightarrow \nabla h \in C^1 \rightarrow \nabla \varphi \in C^1 \rightarrow \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ①

y $\text{Dom}(\vec{F}) = \mathbb{R}^3 \rightarrow$ es simplemente conexo ②

Como se cumplen ① y ② $\rightarrow \vec{F}$ es un campo conservativo $\Rightarrow \vec{F}$ es campo de gradientes en \mathbb{R}^3

Ahora calculo la circulación de \vec{F} sobre C
 \vec{F} es conservativo

$$\int_C \vec{F} d\vec{a} \stackrel{!}{=} \varphi(Q) - \varphi(P) = \ln(h(Q)) - \ln(h(P)) = \ln\left(\frac{h(Q)}{h(P)}\right) *$$

Por enunciado $\int_C \nabla h = 0$

y también es cons. \rightarrow pues cumple ① $\in C^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $\text{dom}(h) = \mathbb{R}^3$
 (simpl. conexo)

$$\int_C \nabla h \stackrel{!}{=} h(Q) - h(P) = 0 \rightarrow h(Q) = h(P)$$

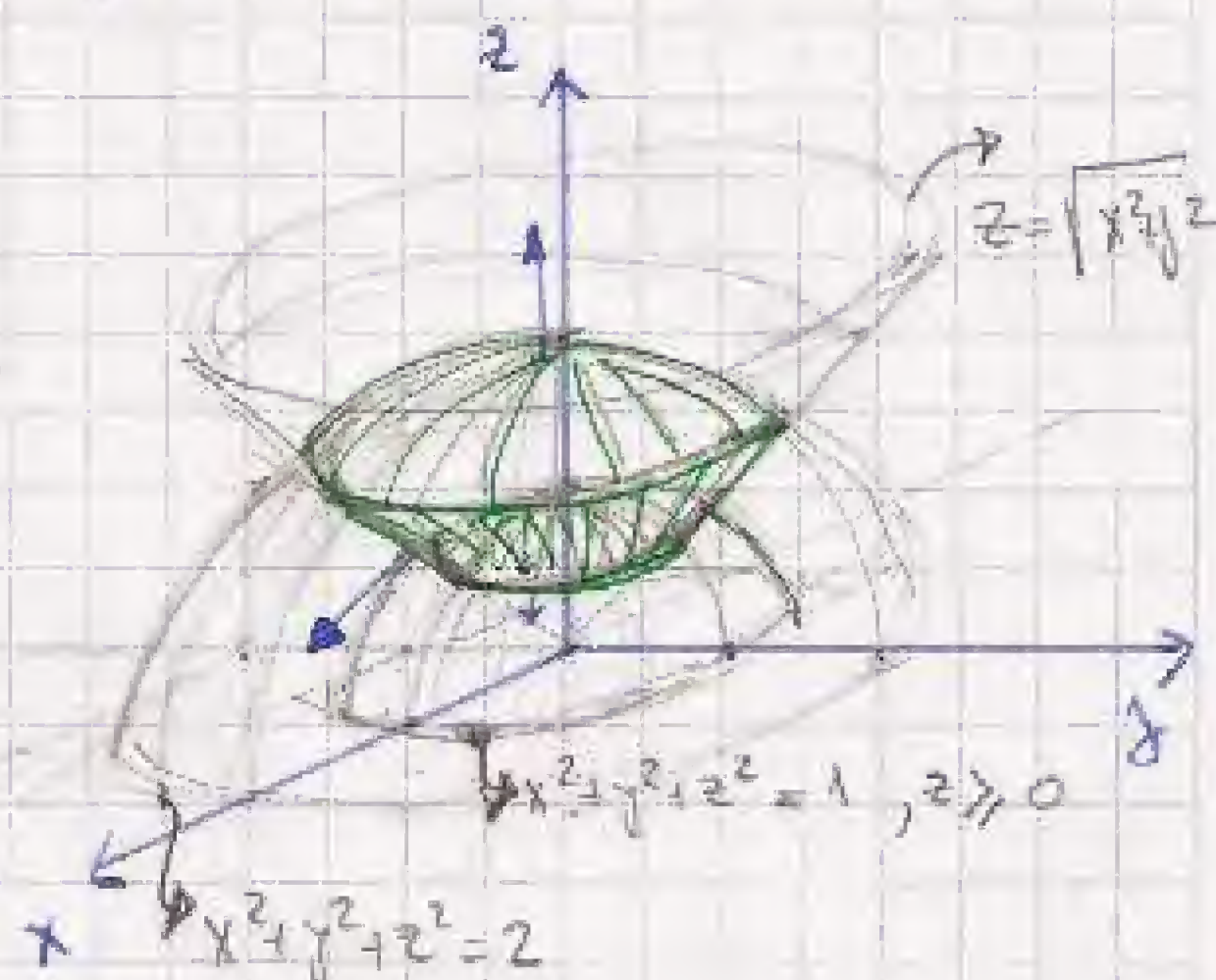
$$\frac{h(Q)}{h(P)} = 1$$

Continuando con *: $\int_C \vec{F} d\vec{a} = \ln\left(\frac{h(Q)}{h(P)}\right) = \ln(1) = 0 = \int_C \vec{F} d\vec{a}$

- ④ Calcular el flujo del campo $\vec{F}(xyz) = (xy^2, e^z, \sin(x))$ a través de la superficie frontera del cuerpo $D = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2} ; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.
Indicar en un gráfico la normal utilizada.

Primero voy a graficar el cuerpo D:

- $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$: semicono positivo y su interior
- $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$: contiene todos los puntos que están arriba de la esfera de radio 1 y debajo de la esfera de radio 2



Ahora, calculo el flujo pedido:

Quiero ver si se cumplen las hipótesis para utilizar el teorema de Gauss:

- D es una región de \mathbb{R}^3 cuya frontera la llamo S, está orientada al exterior ✓
- Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ P, Q, R son funciones: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ pues son funciones elementales $\Rightarrow \vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto para calcular el flujo hago:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \text{div} \cdot \vec{F} \, dV$$

Calculo $\text{div} \cdot \vec{F}$: $\text{div} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{\text{div} \cdot \vec{F} = y^2}$

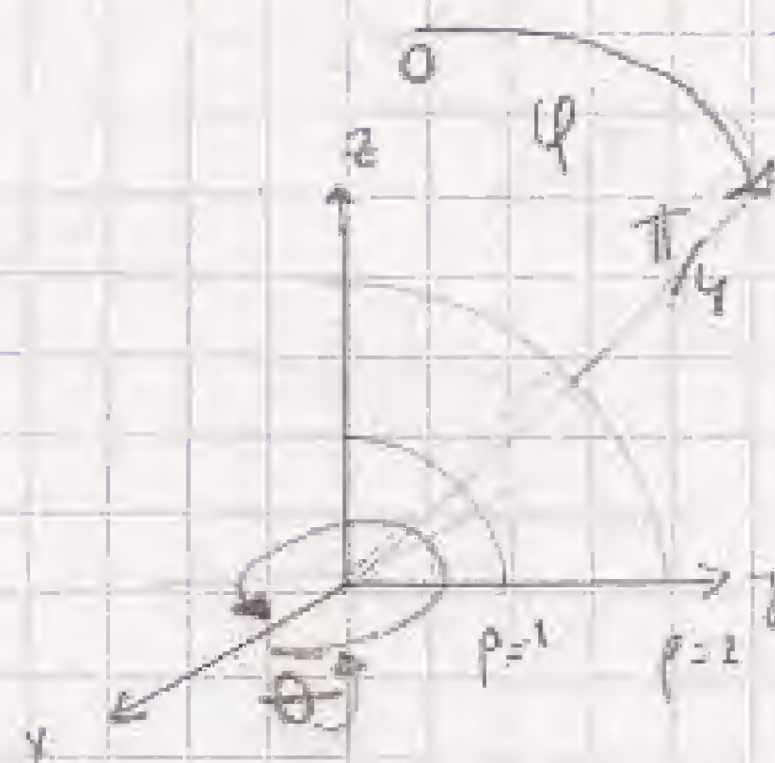
Por la forma de D me va a convenir utilizar un cambio de variables a coord. esféricas.

$$\vec{r}(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$$

con $1 \leq \rho \leq 2$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$



20-12-12

cont. 4

hoja 5

+ Gauss

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} \stackrel{+ \text{ Gauss}}{=} \iiint_D \text{div. } \vec{F} \, d\text{vol} = \iiint_D y^2 \, dx \, dy \, dz = \text{cambio de variable}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \underbrace{(\rho^2 \sin(\varphi))}_{\text{Jacobiano}} \cdot \underbrace{\rho^2 \sin^2(\theta)}_{\vec{s}^2} \cdot \sin^2(\varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^4 \sin^3(\varphi) \cdot \sin^2(\theta) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \sin^3(\varphi) \cdot \sin^2(\theta) \cdot \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_1^2 \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \sin^3(\varphi) \cdot \sin^2(\theta) \cdot \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) \, d\theta \, d\varphi = \frac{31}{5} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \sin^3(\varphi) \sin^2(\theta) \, d\theta \, d\varphi =$$

$$\stackrel{\text{tabla}}{\downarrow} \frac{31}{5} \int_0^{\pi/4} \sin^3(\varphi) \cdot \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \, d\varphi = \frac{31\pi}{5} \int_0^{\pi/4} \sin^3(\varphi) \, d\varphi =$$

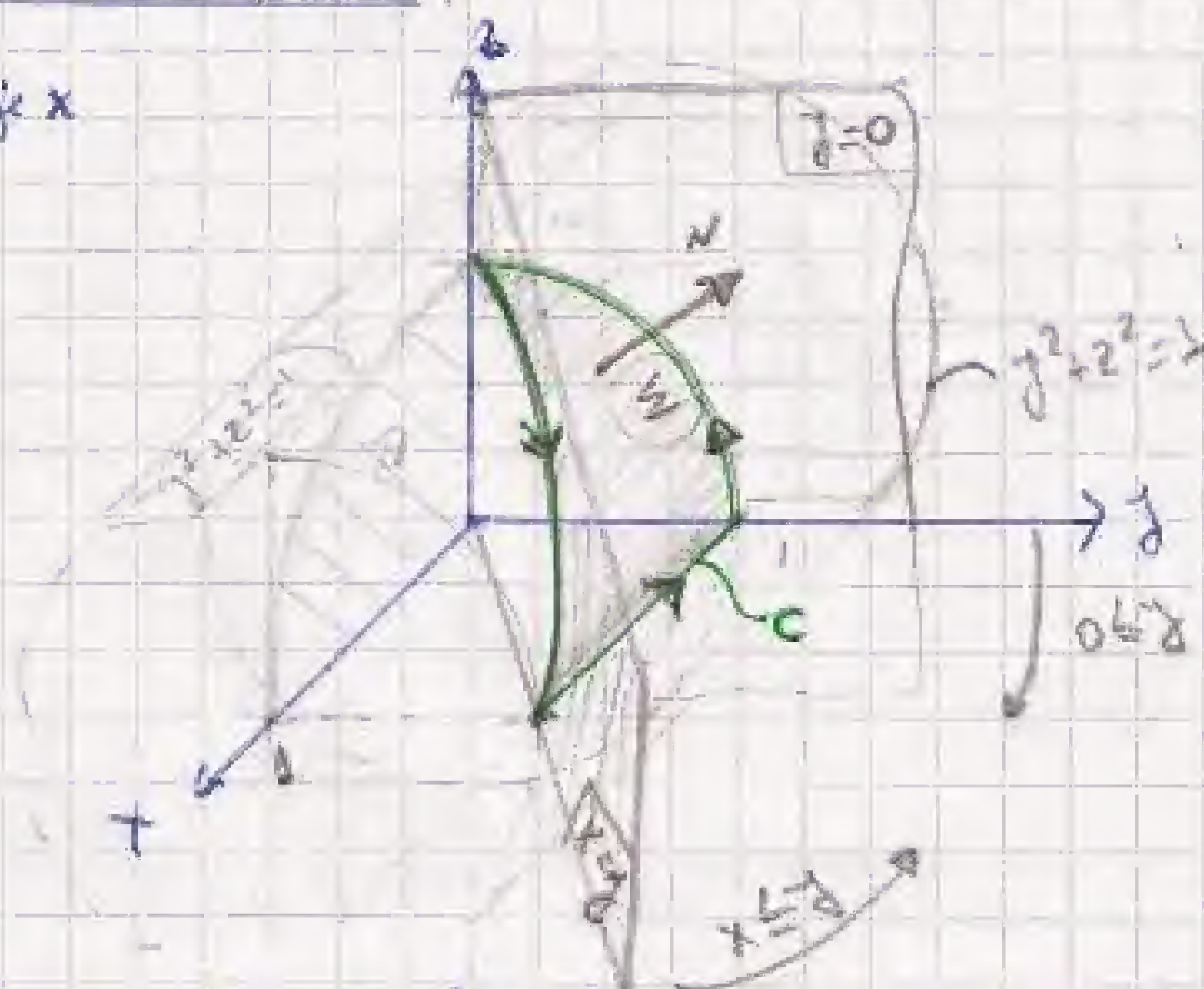
$$\stackrel{\text{tabla}}{\downarrow} \frac{31\pi}{5} \cdot \left(-\cos(\varphi) + \frac{\cos^3(\varphi)}{3} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{31\pi}{5} \cdot \frac{8-5\sqrt{2}}{12} = \frac{31\pi(8-5\sqrt{2})}{60}$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{31\pi(8-5\sqrt{2})}{60}}$$

- ⑤ Sea \vec{F} un campo vectorial $C^3(\mathbb{R}^3) + g$, $\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = (-2x, y, z)$ y $g(x,y,z) = x^2y + yz^2$. Siendo $\vec{H} = \vec{F} + \nabla g$, hallar la circulación de \vec{H} a lo largo de la curva frontera de la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1; 0 \leq x \leq y; z \geq 0\}$. Indicar en un gráfico el sentido de circulación elegido.

Primero voy a analizar la superficie dada por Σ .

- $y^2 + z^2 = 1 \rightarrow$ cilindro con eje en el eje x con radio 1
- $0 \leq x \leq y \wedge z \geq 0 \rightarrow$ 1º corte
- $x \leq y$



Analizo si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes (ya que pueden calcular la circ. en una sup de \mathbb{R}^3)

- Σ es una sup suave orientable $\gamma \in C^\infty \rightarrow \in C^2(\mathbb{R}^3)$, pues es una porción de cilindro $y^2 + z^2 = 1$. Una parametrización sería $\varphi(x, \theta) = (x, \cos(\theta), \sin(\theta))$ con $r=1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq x \leq \cos(\theta)$ $\rightarrow \boxed{\varphi(x, \theta) = (x, \cos(\theta), \sin(\theta))}$

Las componentes de φ son func. elementales $\rightarrow \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

- $C = \partial \Sigma$ es una curva suave a trozos, regular y orientada positivamente ✓
- $\vec{H} = \vec{F} + \nabla g$, donde $\vec{F} \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y en un punto $\nabla g \in C^\infty$ porque es suma de funciones elementales $\therefore \vec{H} \in C^3(\mathbb{R}^3) \rightarrow \vec{H} \in C^1$ en Σ ✓

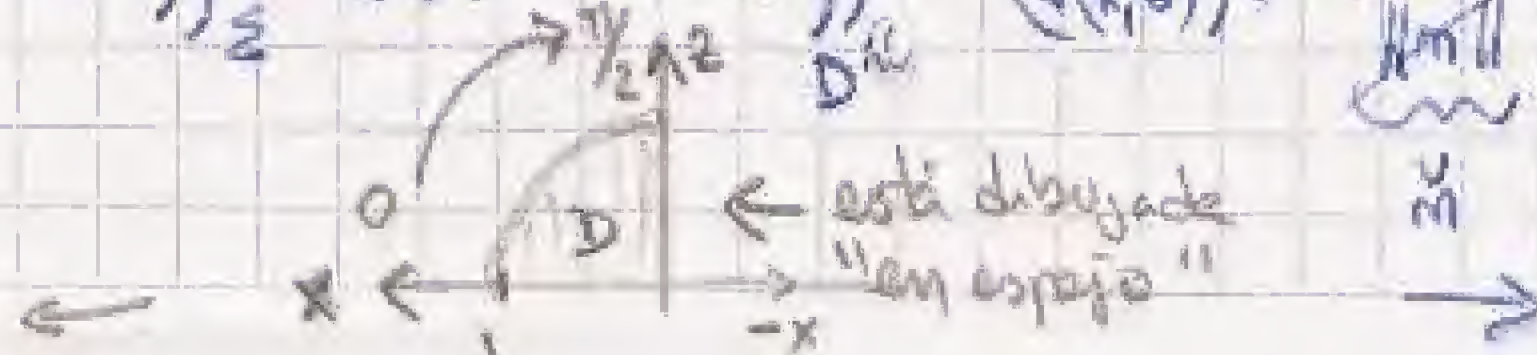
Como se cumplen las hipótesis, uso T. Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{e} = \iint_{\Sigma} \text{rot. } \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \text{rot. } (\vec{F} + \nabla g) \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} (\text{rot. } \vec{F} + \text{rot. } \nabla g) \cdot d\vec{s} =$$

$$\text{Sea } M(x,y,z) = (-2x, y, z) \rightarrow \text{ } = \iint_{\Sigma} M(x,y,z) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{D \subset \mathbb{R}^2} M(\varphi(x,\theta)) \cdot \|\nabla \varphi\| \cdot \frac{\vec{n}}{\|\nabla \varphi\|} \cdot dxd\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$0 \leq x \leq \cos(\theta)$$



20-12-12

Covt. S

Hoja 7

$$\text{Halla } m = \varphi'_\theta \times \varphi'_x$$

$$\varphi(x, \theta) = \left(\underbrace{x}_x, \underbrace{\cos(\theta)}_y, \underbrace{\sin(\theta)}_z \right)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$0 \leq x \leq \cos(\theta)$$

$$\varphi'_\theta = (0, -\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$\varphi'_x = (1, 0, 0)$$

$$\rightarrow m = (0, \cos(\theta), \sin(\theta))$$

$$M(\varphi(x, \theta)) = \left(\underbrace{-2x}_{-2x}, \underbrace{\cos(\theta)}_y, \underbrace{\sin(\theta)}_z \right)$$

Entonces:

$$\iint_D M(\varphi(x, \theta)) \cdot m \, dx \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} (-2x, \cos(\theta), \sin(\theta)) \cdot (0, \cos(\theta), \sin(\theta)) \, dx \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} \underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_1 \, dx \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} dx \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta =$$

$$= \sin(\theta) \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

$$\boxed{\oint_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{e} = 1}$$